Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 7

Abgabe: Montag, den 10. Juni 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 7.1 (*4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\sigma, \tau \in S_n$ und $f, g \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau)f$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$ gilt.

Aufgabe 7.2 (*4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und A_n die alternierende Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe S_n genau dann kommutativ ist, wenn $n \leq 2$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller 3-Zyklen die Gruppe A_n erzeugt, falls $n \geq 3$ gilt.

Hinweis: Eine Teilmenge M einer Gruppe G erzeugt G, falls jedes Element von G als Produkt aus Elementen von M und Inversen von Elementen von M geschrieben werden kann.

Aufgabe 7.3 (*4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit Basis $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ und $\delta \colon V^n \to K$ ein n-lineares alternierendes Funktional.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\pi \in S_n$ schon $\delta(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) = Sign(\pi)\delta(z_1, \ldots, z_n)$ gilt.

(b) Das n-lineare alternierende Funktional δ wird als *trivial* bezeichnet, wenn $\delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$ für alle $z_1, \ldots, z_n \in V$ gilt. Zeigen Sie, dass δ genau dann trivial ist, wenn $\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ gilt.

Aufgabe 7.4 (*4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $\mathbb{A}$ die Menge der n-linearen alternierenden Funktionale $\underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n\text{-mal}} \to K$.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}$ ein K-Unterraum des K-Vektorraums $L^{(n)}(K^n \times \ldots \times K^n; K)$ ist.